

Title	無限粒子系の物理と数学(基研短期研究会『統計物理の現状と展望』～STATPHYS19に向けて～,研究会報告)
Author(s)	香取, 眞理
Citation	物性研究 (1992), 58(5): 545-552
Issue Date	1992-08-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94920
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

無限粒子系の物理と数学

東大理 香取眞理

1 はじめに

無限粒子系の研究について、contact process を例にして解説を試みる。物理系への応用例として、このプロセスと触媒表面の数値モデルとの関係を示す。また、contact process の臨界現象については、directed percolation problem との関係で議論する。最後に簡単ではあるが、この分野での研究の現状をまとめ、今後の展望に言及する。

2 Contact Process について

2.1 プロセスの説明

このプロセス或いはこれと等価なプロセスは、様々な分野で調べられているが、まずは「簡単な伝染病の伝播のモデル」と思って見てもらおうと分かり易いであろう。数学的に取り扱った最初の論文は、Harris によるものである¹⁾。d 次元 simple cubic lattice \mathbb{Z}^d を考える、時間 t は連続とする。各格子点 $x \in \mathbb{Z}^d$ 上に確率変数 $\eta(x, t)$ がのっている。 $\eta(x, t)$ は各々 0 か 1 の値をとる。0 は健康な人を、1 は感染者を表すと考ええる。ダイナミクス（スピンフリップ $0 \leftrightarrow 1$ ）は次のように与える。i) $0 \rightarrow 1$ at rate $\lambda \times \{\text{最近接格子点上の感染者の総数}\}$ 。ii) $1 \rightarrow 0$ at rate 1。但し、 λ はパラメータであり、感染率を表す。i) のプロセスは、接触感染を表し、ii) は自然治癒を表す。

2.2 Contact Process と等価なプロセス

次のプロセスは、contact process と本質的には等価である。i) 格子上の Schlögl's first model,²⁾ ii) Reggeon Quantum Spin Model,³⁾ iii) ある種の結晶成長のモデル。⁴⁾

2.3 graphical representation

プロセスは、space-time $\mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$ 上に次のように表すことができる（詳しくは、D.Griffeath⁵⁾ を参照のこと）。

[1]: まず、各格子点ごと独立に、その上 $x \times [0, \infty)$ に rate 1 の Poisson process $\{U_n^x; n \geq 1\}$ を考える。すなわち、(i) $U_0^x = 0$ 、(ii) $U_n^x - U_{n-1}^x, n = 1, 2, 3, \dots$ 独立、(iii) $P(U_n^x - U_{n-1}^x \geq t) = e^{-t}$ 。また、各最近接格子点对ごと独立に、その上 $(x, y) \times [0, \infty)$ に rate λ の Poisson process $\{T_n^{(x,y)}; n \geq 1\}$ を考える。すなわち、(i') $T_0^{(x,y)} = 0$ 、(ii') $T_n^{(x,y)} - T_{n-1}^{(x,y)}, n = 1, 2, 3, \dots$ 独立、(iii') $P(T_n^{(x,y)} - T_{n-1}^{(x,y)} \geq t) = e^{-\lambda t}$ 。但しここで (x, y) は順序が意味を持つ、すなわち $(x, y) \neq (y, x)$ とする。そして、グラフ $\mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$ 上には、各 U_n^x 点に δ の記号を、 $T_n^{(x,y)}$ の所には x から y への矢印を書き込むことにする。1次元系の場合に得られるグラフの一例を図1に示した。

[2]: $t = 0$ での初期状態を与える。ここでは例として図1に示したように、 $t = 0$ で \bullet で示した2点に感染者がいる場合を考えよう。

[3]: 図1の右側に示したルールに従って下から上へ時間正の向きに太線を引いていく。すなわち、矢印の所で太線は branch する（これが感染を表す）。但し矢印の先に既に太線がある場合には、この branch の結果変化なしとする（或いは coalesce すると考えても良い）。他方、太線が記号 δ にぶつかったときには、太線をそこで中断する（治癒を表す）。

[4]: [3]をあまりくじの要領で行っていく。ある時刻 t まで進めたとき、太線で初期の●と結ばれている格子点が、その時刻での感染領域となる。図1は、時刻 t では●でマークされた6つの格子点上が感染しているようなプロセスが表されたことになる。

この representation を見ると、contact process は space-time の上での percolation problem とみなせることが分かるであろう。またこの graphical representation は、§2.5 で説明するように、process の survival を証明するのに役立つ。

2.4 extinction of the process

感染領域は集合 $A_t = \{x : \eta(x, t) = 1\} \subset \mathbb{Z}^d$ で表される。

1) もしも、有限系を考えているのなら、初期状態によらず必ず $A_t \rightarrow \emptyset, t \rightarrow \infty$ となる。なぜならば、各格子点で constant rate で $\eta(x) = 1 \rightarrow 0$ がおこり、一度 $A_t = \emptyset$ となればそれ以降はずっと \emptyset のままであるからである（この意味で、 \emptyset は process A_t の absorbing state 或いは trap となっている）。

2) 無限系であっても、 λ が小さければ、初期状態によらず $A_t \rightarrow \emptyset$ となることも容易に示せる。例えば、 $1 > 2d\lambda$ すなわち $\lambda < 1/(2d)$ では $A_t \rightarrow \emptyset$ となることは容易に納得できよう。

$$P(A_t = \emptyset \text{ for some } t \geq 0) = 1, \quad (2.1)$$

のとき、プロセスは extinct であるという。 $\lambda < 1/(2d)$ では、全ての初期状態に対して、プロセスは extinct である⁶⁾。

2.5 survival of the process

しかし、無限系では感染率 λ を十分に大きくとると $t \rightarrow \infty$ においても A_t が \emptyset とならないことがありえる。すなわち健康な個体 0 と感染者 1 とが共存する定常状態が出現するのである。このような場合、すなわち

$$P(A_t \neq \emptyset \text{ for all } t \geq 0) > 0, \quad (2.2)$$

のとき、プロセスは survival であるという。証明方法は4通りほど考えられるが、ここでは contour method (或いは Peierls argument といっても良い) に large deviation estimate の方法を応用したやり方⁷⁾で示してみる（雰囲気だけ）。

まず survival (2.2) は、 $P(A_t = \emptyset \text{ for some } t \geq 0) < 1$ ということであることに注意する。よって、やるべきことは、 $P(A_t = \emptyset \text{ for some } t \geq 0)$ の上限を求めることである。図1のように各プロセスは、 $\mathbb{Z}^d \times [0, \infty)$ 上の線（世界線）の集合で表される。ここでは、この集合を覆うような、tree set T を考える。

$$T = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty) : |x - y| \leq 1/2 \text{ for some } y \in A_t\}. \quad (2.3)$$

さらに次のことに注目する。

$$P(A_t = \emptyset \text{ for some } t \geq 0) = P(T \text{ is bounded}). \quad (2.4)$$

すなわち、問題は $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ 上の領域 T に対する評価に帰着されたことになる。特に、 $d = 1$ の場合は空間1次元+時間1次元の平面上の問題となるので、2次元系に対してなされた Peierls argument が応用できる。

ここでは、Bramson-Gray に従って、 T を separation time の回数 K で分類して、 K についての数学的帰納法によって上限を得ることにする。ここでいう、separation time とは tree set T が枝分かれする時刻をいう。 $d = 1$ の場合には、(有限な contact process に対しては) 各時刻において、width W_t を定義することができる。

$$W_t = \max\{x : \eta(x, t) = 1\} - \min\{x : \eta(x, t) = 1\} + 1. \quad (2.5)$$

i) $K = 0$ のとき、簡単な考察より、 W_t が1だけ増す確率 $\geq \lambda/(1+\lambda)$ 、 W_t が1だけ減る確率 $\leq 1/(1+\lambda)$ 、であることが示せる。よって λ が大きいと width W_t は増大の傾向にあることが分かる。 T が bounded っ

まりプロセスが extinct であるのは、それにもかかわらずある時刻 t で $W_t = 1$ (すなわち 感染者が一人だけ) となって、さらにまわりに伝染する前に治癒してしまうという場合である。このようなことは、大変起こりにくい。一般に、起こりにくい事象の出現確率の評価に対しては、large deviation estimate と呼ばれる方法が知られている。これを用いると、 $0 < C < \infty, 0 < R < 1$ なる定数を用いて、初期の width $W_0 = 1$ なるプロセスに対して、

$$P(T \text{ is bounded}, K = 0) \leq \frac{1}{\lambda} \frac{CR^I}{I^2}, \quad (2.6)$$

という評価が得られる。

ii) K についての数学的帰納法が $0 < \lambda_0 < \lambda$ で出来て、

$$P(T \text{ is bounded}, K \leq k) \leq \frac{1}{\lambda} \frac{CR^I}{I^2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

が得られる。

よって、 $\lambda > \max \{ \lambda_0, \sup_{I \geq 1} (CR^I/I^2) \}$ とすれば任意の (有限な) 初期状態に対して $P(T \text{ is bounded}) < 1$ が得られることになるのである。

contact process の場合には、具体的に λ_0, C, R を求めることもできる。その結果、1 次元 contact process は $\lambda > 5.4$ で survival であることが示せる。

contact process は (ここでは詳しくは述べないが) attractive system である⁸⁾。この場合には、coupling method と呼ばれる方法が使えて、 $d = 1$ のときに $\lambda > \lambda_0$ で survival ならば、 $d > 1$ のときには、 $\lambda > \lambda_0/d$ で survival であることが示せる⁹⁾。

さらに、別の知識 (attractive renewal measure 等々) を用いると、もっと良い結果が得られる。Holley と Liggett⁹⁾ は、一般に d 次元の contact process は、 $\lambda > 2/d$ で survival であることを証明している。

Remark. この survival な定常状態は、詳細つりあいを満たしていない。また今の場合、このことはこの定常状態では時間についての reversibility も破れていることを意味する。これについては、香取・今野の解説 10) を参照のこと。

2.6 相転移

以上の考察から contact process は、感染率 $\lambda < 1/(2d)$ では extinct であり、 $\lambda > 2/d$ では survival であることが分かった。実際には、この間のある $\lambda_c(d)$ という臨界値で extinction から survival への相転移がおこる。ここでの order parameter は、 $t = 0$ で感染者がただ一人である場合の survival probability ρ_λ が適当である。

$$\rho_\lambda = P(\text{survival for } A_0 = \{x\}). \quad (2.8)$$

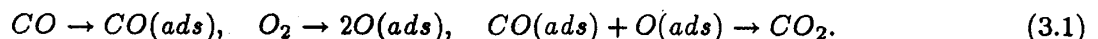
次のことが証明されている⁸⁾。

i) $1/(2d) \leq \lambda_c(d) \leq 2/d$, ii) $\rho_\lambda = 0$ for $\lambda \leq \lambda_c(d)$, iii) $\rho_\lambda > 0$ for $\lambda > \lambda_c(d)$, iv) ρ_λ is a non-decreasing function of λ , v) ρ_λ is continuous on $[\lambda_c(d), \infty)$.

$\lambda = \lambda_c(d)$ で $\rho_\lambda = 0$ であること (すなわち 2 次転移であるということ) は、最近 Besuidenhout と Grimmett によって証明された¹¹⁾。

3 触媒表面の数値モデルとの関係

Ziff らは、プラチナ表面上の次の反応に対して簡単な格子ガスモデルを提案した¹²⁾、



ここで、ads は表面への吸着状態 (adsorbed state) を表す。彼らはそのモデルに対して computer simulation を行い、CO の分圧に対応するパラメータが、小さいときには表面は O に覆われてしまい、また大きいと

きには CO に覆われてしまい、ともに反応が止まることを示した。これに対して、中間の場合には、反応が持続することを 2 次元表面についてデモンストレートした。前者の状態は、実際の触媒反応で見られる poisoning state に、後者はいわゆる active state に対応すると思われる。

Grannan と Swindle は¹³⁾、最近この Ziff らのモデルをより簡単化した、しかしながら粒子の種類は CO と O の 2 種類ではなく一般に N 種類としたモデルを提案した。すなわち、i) $\{1, 2, \dots, N\}$ という N 種の粒子があるとする。ii) 各格子点上に独立に i 種の粒子は rate p_i で吸着する ($1 \leq i \leq N$)。但し、 $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ としておく (p_i は種 i の分圧)。iii) $i \neq j$ なる 2 つの粒子が隣りあったらすぐに反応して結合し、その結果表面から解離する。

いま、空孔を 0 で表すと、このモデルは、 $\xi(x, t) \in \{0, 1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{Z}^d}$ なるプロセスとみなせる (d は表面の次元)。そして、プロセス ii), iii) はそれぞれ、

$$\xi(x, t) = 0 \rightarrow i \text{ at rate } p_i \quad (1 \leq i \leq N),$$

$$(\xi(x, t), \xi(y, t)) = (i, j) \rightarrow (0, 0) \text{ at rate } \infty \text{ for } |x - y| = 1, i \neq j.$$

このプロセス $\xi(x, t)$ の $t \rightarrow \infty$ での振舞いとして次の 2 つが考えられる。1) $\xi(x, t) = i$ for all x (これを δ_i と書く)。一度 δ_i の状態になると反応は停止する。すなわち δ_i ($1 \leq i \leq N$) はどれも、プロセスの trap になっている。別の言い方をすれば、 δ_i は i 種の粒子による poisoning state である。

2) どの δ_i にも trap されずに、0 (空孔) がいつまでもある rate で存在して、反応が持続する。これは active state と呼べるであろう。

まず Grannan と Swindle は、 $N=2$ のときは一般の次元で poisoning state しか存在しないことを証明した¹³⁾。それでは、 $N \geq 3$ の場合はどうであろうか。

彼らは、このプロセスと §2 で説明した contact process とをうまく比較して、

$$p_i < \frac{1}{2d\lambda_c(d) + 1}, \quad (3.2)$$

のときには、 ξ は δ_i に trap されることはないという関係を得た。ここで $\lambda_c(d)$ は d 次元 contact process の臨界値である。

ところが、§2 で述べたように $\lambda_c(d) \leq 2/d$ が証明されているので、 $1/(2d\lambda_c(d) + 1) \geq 1/5$ である。よって、 $p_i < 1/5$ とすれば δ_i に trap されることはない。このことと、 $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ という条件より、種の数 $N \geq 6$ なら、どの δ_i ($1 \leq i \leq N$) にも trap されないことがあり得ることが分かる。なぜならば、この場合には、 $\{p_i\}$ のパラメータ空間の $p_i = 1/N$ ($1 \leq i \leq N$) の点の近くの有限な領域において全ての $1 \leq i \leq N$ に対して $p_i < 1/(2d\lambda_c(d) + 1)$ と出来るからである。いまの場合、どの δ_i にも trap されない結果 active state が存在できることになる¹³⁾。

この例は、contact process の研究が、触媒表面の数値モデルという一見全く別のプロセスに対する解析に役立つということの良い例になっているように思われる。

尚、2 次元系に対する computer simulation では、実際には $N = 3$ でも active state が存在するという報告もあるようである¹³⁾。また、この Grannan と Swindle のモデルはモノマーのみの系であったが、もともとの Ziff らのようにダイマーとモノマーの混合系については今後の研究が待たれる。

4 Directed Percolation との関係 (臨界現象について)

contact process は臨界値 $\lambda_c(d)$ で臨界現象を示す。例えば、order parameter ρ_λ は fractional な臨界指数 β を持って出現することが予想されている、

$$\rho_\lambda \sim (\lambda - \lambda_c(d))^{\beta(d)}. \quad (4.1)$$

この臨界現象に関して、次のような予想がされている。すなわち、「 d 次元の contact process の臨界指数は、 $d + 1$ 次元の directed percolation problem の臨界指数と関係がつく¹⁴⁾」。

directed percolation については Kinzel¹⁵⁾ 或いは Durrett¹⁶⁾ の論文を見てもらうことにする。 $d+1$ 次元の directed percolation において、open bond からなる原点を含む cluster C が無限大である確率を $\theta(p) = P_p(|C| = \infty)$ と書くと、ある臨界値 $p_c(d+1)$ があって $p \leq p_c(d+1)$ では $\theta(p) = 0$ であるが、 $p > p_c(d+1)$ では $\theta(p) > 0$ となる (すなわち原点から無限遠まで percolate する)。そして $p_c(d+1)$ 近傍では、

$$\theta(p) \sim (p - p_c(d+1))^{\hat{\beta}(d+1)}, \quad (4.2)$$

の様に振舞うことが予想されている。

先の予想はの場合次のようである、

$$\beta(d) = \hat{\beta}(d+1). \quad (4.3)$$

別の臨界指数については、ref.17 を参照のこと。

directed percolation の臨界指数は、2次元系に対しても exact solution は求められていない。しかし最近の Baxter らの論文¹⁸⁾ では、conjecture として大変奇妙な有理数があげられている。上に述べた $\hat{\beta}$ については、 $\hat{\beta}(2) = 199/720$ が conjectured value である。2次元の directed percolation に対する exact solution ははたして近い将来に求められるのであろうか。方向についての制限があるこの問題は、スピン系にある種の外場をかけた問題に相当する。

5 「この分野」での研究の現状

5.1 確率論の分野における研究

無限粒子系は数学の確率論の分野で研究されている。最近標準的な教科書が Griffeath,⁵⁾ Liggett,⁸⁾ Durrett¹⁹⁾ によって与えられた。また、Bezuidenhout と Grimmett の contact process に対する研究¹¹⁾ に代表されるように、最近の percolation problem に対する研究の進展を応用して無限粒子系を解析することがなされつつある。他方、無限粒子系の hydrodynamic limit についての研究も盛んである。これは、格子上の無限粒子系にいわゆる Kawasaki exchange を加えたものを考え、この exchange rate を無限大にするとともに連続極限をとることを考えるものである²⁰⁾。

5.2 Multi-valued Processes

contact process は $\{0, 1\}$ の2値しかとらないプロセスであったが、最近様々な要請から3値以上をとるプロセスが研究されはじめた (前述の触媒表面の N 種モデルもその1例である)。いま、 A と B という2つの状態があるとき、transition $A \rightarrow B$ が最近接格子点上の B の個数に比例した rate で起こるときこれを $A \rightarrow B$ と書き、constant rate で起こるとき $A \rightarrow B$ と書くことにする。例として、contact process は図2 (a) のように表される。

1) 免疫の効果も考えた epidemic model

大月らは partial immunization process (図2 (b))、及び imperfect immunization process (図2 (c)) を考え、平均場近似と実空間くりこみ群によって相図を調べた²¹⁾。Durrett, Neuhauser は図2 (d) のような系に対して、いくつか厳密な結果を得た²²⁾。

2) 生態系のモデル

松田、佐々木、佐藤は、図2 (e) のような系を、平均場近似と computer simulation によって研究し相図を調べた²³⁾。泰中らは、図2 (f) で表されるような格子上の Lotka-Volterra model の様々な variation を computer simulation によって研究している²⁴⁾。Durrett, Swindle は図2 (g) のような系を解析して、定常状態における1と2の共存に関して厳密な結果を得ている²⁵⁾。

3) その他

最近 Bramson と Griffeath は、図2 (h) に示したような、cyclic particle system と呼ばれる系の定常分布の N 依存性について、1次元の場合に厳密な結果を得た²⁶⁾。

5.3 Annihilating Process, Multi-Particle Annihilation

1) Bramson と Gray は、branching annihilating random walk と呼ばれる系の相転移を論じた⁷⁾。この系は、rate 1 で branching し、rate ρ で jumping する粒子系であるが、この branching 或いは jumping の結果 2 粒子が同じ格子点に来たときには、すぐに対消滅をするものである。彼らは、2 次元以下では ρ が大きいときには process は extinct し、また 1 次元の場合 ρ が小さいときに survival であることを厳密に証明している。数学的には、この系は non-attractive であることが興味深い。Bramson らは、また annihilating branching が rate 1 で起こり、single annihilation が rate δ で起こる系についても報告している²⁷⁾。

最近、Dickman は触媒表面のモデルとして branching, jumping 及び multi-particle annihilation からなる系について、平均場近似や computer simulation で調べている²⁸⁾。我々は、この系も Bramson-Gray の方法で解析できることを報告した²⁹⁾。

5.4 その他

その他、次のような研究がこの「分野」に含まれると思う。1) 高安・高安らの注入のある aggregation model (或いは川のモデル) における安定分布に関する研究³⁰⁾。2) multi-offspring branching process の定常分布に関する Sudbury (rigorous argument),³¹⁾ 高安、Tretyakov (computer simulation 等)³²⁾ の研究。3) $A + B \rightarrow \emptyset$ (A, B は diffusive) といった diffusion-controlled reaction における density の $t \rightarrow \infty$ での漸近形の、初期分布や次元に対する依存性の研究。これについては、Bramson-Lebowitz がいくつか厳密な結果を報告している³³⁾。また、大月はくりこみ群を用いて研究している³⁴⁾。

6 展 望

無限粒子系の研究は、例えば次の方向の研究と今後関係してくるものと期待される。1) 触媒表面の反応系、特にその表面構造、パターン。2) Bak らの self-organized criticality を示すモデル、或いは、伊藤、高安らの地震のモデルの解析。3) 確率的セル・オートマトンの研究。4) DLA のパターンに対する理論的研究。

参 考 文 献

- [1] T.E.Harris, *Ann. Prob.* **2** (1974) 969.
- [2] P.Grassberger and A. de la Torre, *Ann. Phys.* **122** (1979) 373.
- [3] R.C.Brower, M.A.Furman, and K.Subbarao, *Phys.Rev D* **15** (1977) 1756.
- [4] N.Goldenfeld, *J.Phys.* **A17** (1984) 2807.
- [5] D.Griffeath, *Additive and Cancellative Interacting Particle Systems* (Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol.724, Springer-Verlag, New York, 1979).
- [6] 例えば、M.Katori and N.Konno, *J.Stat.Phys.* **63** (1991) 115 を見よ。
- [7] M.Bramson and L.Gray, *Z.Wahrsch. verw. Gebiete* **68** (1985) 447.
- [8] T.M.Liggett, *Interacting Particle Systems* (Springer-Verlag, New York, 1985).
- [9] R.Holley and T.M.Liggett, *Ann.Prob.* **6** (1978) 198.
- [10] 香取・今野、*統計数理* **38** (1990) 243.
- [11] C.Bezuidenhout and G.Grimmett, *Ann.Prob.* **18** (1990) 1462.

- [12] R.M.Ziff, E.Gulari, and Y.Barshad, *Phys.Rev.Lett.* **56** (1986) 2553.
- [13] E.R.Grannan and G.Swindle, *J.Stat.Phys.* **61** (1990) 1085.
- [14] J.L.Cardý and R.L.Suger, *J.Phys.* **A13** (1980) L423.
- [15] W.Kinzel, *Ann.Israel Phys.* **5** (1983) 425.
- [16] R.Durrett, *Ann. Prob.* **12** (1984) 999.
- [17] N.Konno and M.Katori, *J.Phys.Soc.Jpn.* **59** (1990) 1581.
- [18] R.J.Baxter and A.J.Guttmann, *J.Phys.* **A21** (1988) 3193; J.W.Essam, A.J.Guttmann, and K.De'Bell, *J.Phys.* **A21** (1988) 3815.
- [19] R.Durrett, *Lecture Notes on Particle Systems and Percolation* (Wadsworth, California, 1988).
- [20] A.De Masi, P.A.Ferrari, and J.L.Lebowitz, *J.Stat.Phys.* **44** (1986) 589.
- [21] T.Ohtsuki and T.Keys, *Phys.Rev.* **A33** (1986) 1223.
- [22] R.Durrett and C.Neuhauser, *Ann.Appl.Prob.* **1** (1991) 189.
- [23] 佐藤一憲、生物物理 31 (1991) 32 及びそのなかの参考文献。
- [24] K.Tainaka, *J.Phys.Soc.Jpn.* **57** (1988) 2588; *Phys.Rev.Lett.* **63** (1989) 2688.
- [25] R.Durrett and G.Swindle, *Stoch.Proc.Appl.* **37** (1991) 19.
- [26] M.Bramson and D.Griffeath, *Ann.Prob.* **17** (1989) 26.
- [27] M.Bramson, D.Wan-ding, and R.Durrett, *Stoch.Proc.Appl.* **37** (1991) 1.
- [28] R.Dickman, *Phys.Rev.* **B40** (1989) 7005; **A42** (1990) 6985.
- [29] M.Katori and N.Konno, preprint(1991).
- [30] H.Takayasu, I.Nishikawa, and H.Tasaki, *Phys.Rev.* **A37** (1988) 3110; H.Takayasu, M.Takayasu, A.Provata, and G.Huber, *J.Stat.Phys.* (1991).
- [31] A.Sudbury, *Ann.Prob.* **18** (1990) 581.
- [32] H.Takayasu and A.Yu.Tretyakov, preprint(1991).
- [33] M.Bramson and L.Lebowitz, *J.Stat.Phys.* **62** (1991) 297.
- [34] T.Ohtsuki, *Phys.Rev.* **A43** (1991) 6917.

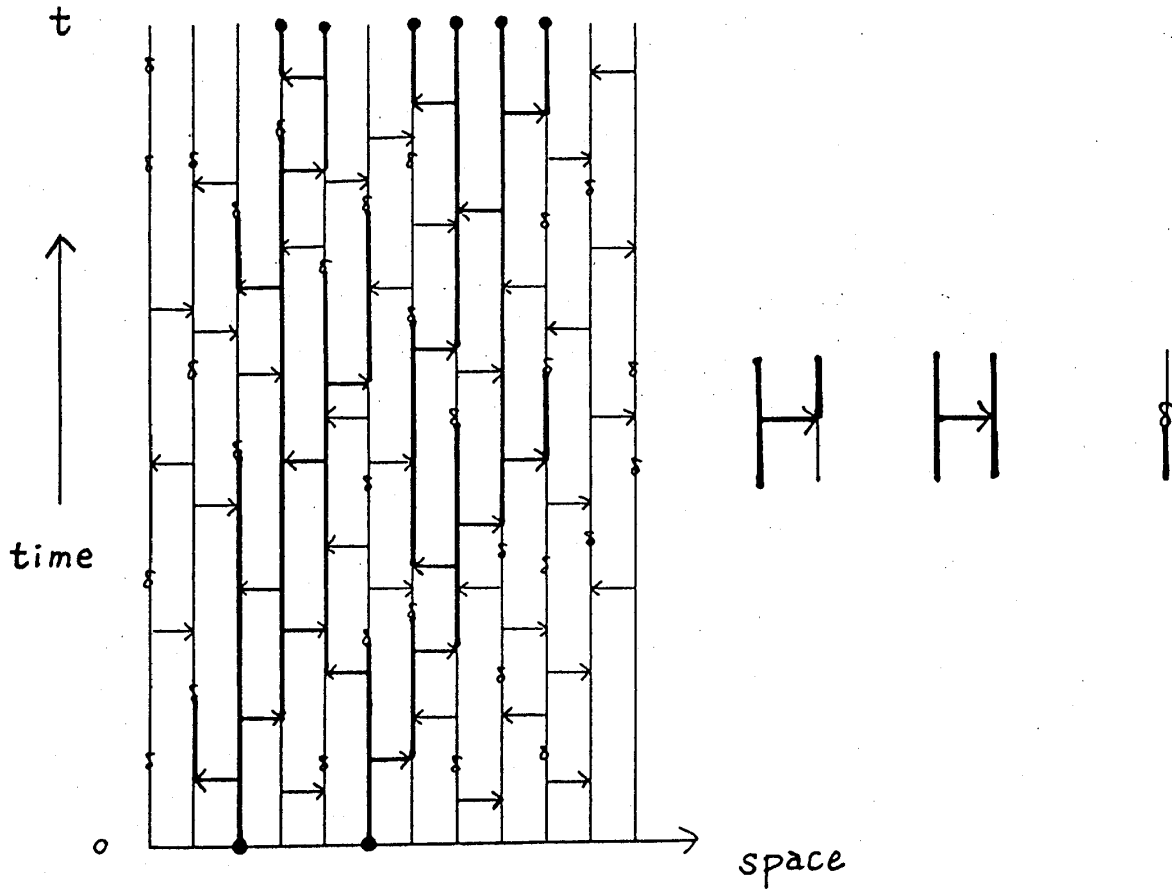


図 1

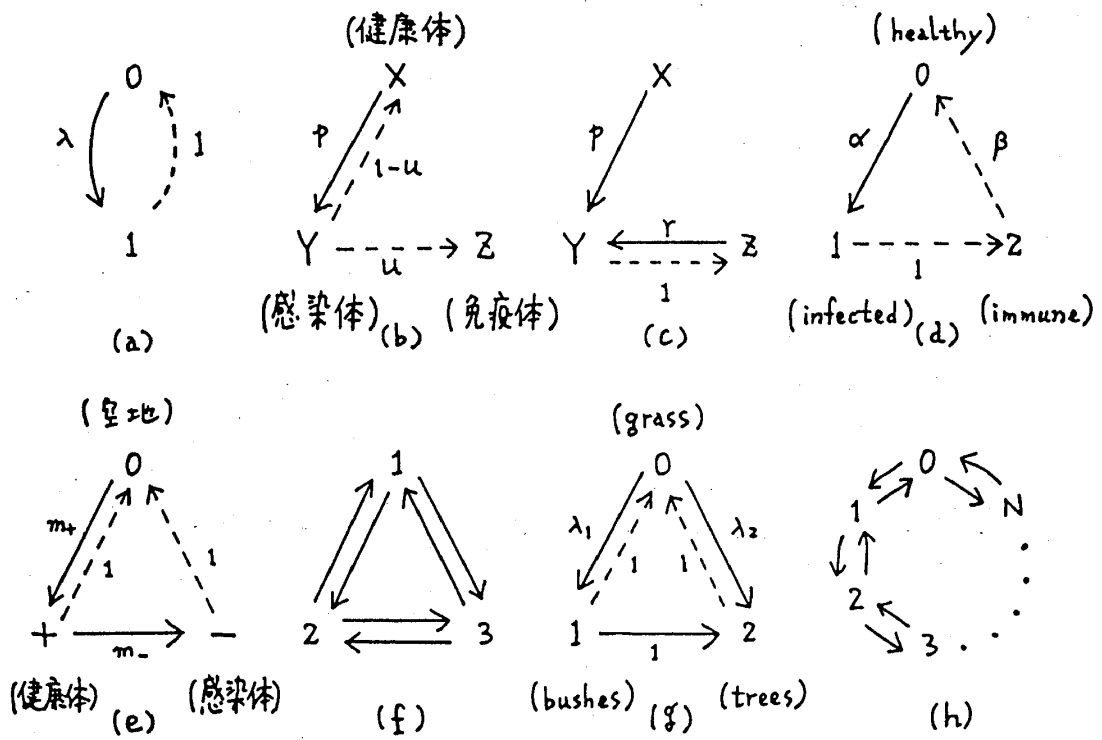


図 2